Insiemi fuzzy[*]

L. A. ZADEH

Dipartimento di ingegneria elettronica e laboratorio di ricerca elettronica.

Università della California, Berkeley, California

Un insieme *fuzzy*[**] è una classe di oggetti con un continuum di gradi di appartenenza. Tale insieme è caratterizzato da una funzione (caratteristica) di appartenenza che assegna a ogni oggetto un grado di appartenenza variabile tra zero e uno. Le nozioni di inclusione, unione, intersezione, complemento, relazione, convessità, ecc., si estendono anche a tali insiemi, e numerose proprietà di queste nozioni restano confermate nel contesto degli insiemi *fuzzy*. In particolare, è possibile verificare un teorema di disgiunzione per insiemi *fuzzy* convessi senza che questi ultimi siano disgiunti.

I. INTRODUZIONE

Nella maggior parte dei casi le classi di oggetti che si incontrano nel mondo fisico reale non hanno precisi e definiti criteri di appartenenza. Ad esempio, la classe degli animali include chiaramente come suoi membri cani, cavalli, uccelli, ecc., ed esclude altrettanto chiaramente alcuni oggetti come le rocce, i fluidi, le piante, ecc. Tuttavia alcuni oggetti come la stella marina o i batteri possiedono uno status ambiguo rispetto alla classe degli animali. Lo stesso tipo di ambiguità si presenta nel caso dei numeri come il 10 in relazione alla "classe" di tutti i numeri reali molto più grandi di 1.

Chiaramente la "classe di tutti i numeri reali molto più grandi di 1" o "la classe delle donne belle", oppure "la classe degli uomini alti" non formano classi o insiemi nel senso matematico usuale di questi termini. Tuttavia rimane il fatto che tali "classi" imprecisamente definite svolgono un ruolo importante nel pensiero umano, soprattutto negli ambiti dei modelli d'identificazione, di comunicazione delle informazioni e dell'astrazione.

Lo scopo di questo scritto è di esplorare in via preliminare alcune proprietà di base e le implicazioni di un concetto che può rivelarsi utile per trattare con "classi" del tipo sopra citato. Il concetto in questione è quello dell'*insieme fuzzy*[1], cioè una "classe" con un continuum di gradi di appartenenza. Come si vedrà in seguito, la nozione di insieme *fuzzy* fornisce un punto di partenza conveniente per la costruzione di una struttura concettuale che in un certo senso è simile a quella utilizzata per gli insiemi ordinari, ma è più generale di quest'ultima e, potenzialmente, dimostra di possedere un più ampio raggio di applicabilità, specie nei campi dei modelli di classificazione e del trattamento delle informazioni. In breve, tale struttura fornisce un metodo naturale per affrontare problemi nei quali la fonte di imprecisione è costituita dall'assenza di criteri definiti e precisi di appartenenza alla classe più che dalla presenza di variabili casuali.

Inizieremo la discussione sugli insiemi *fuzzy* con parecchie definizioni di base.

II. DEFINIZIONI

Sia X uno spazio di punti (oggetti), con un generico elemento x di X. Ossia, $X = \{x\}$.

---

[*] Questo lavoro è stato parzialmente supportato dal Joint Services Electronics Program (U.S. Army, U.S. Navy e U.S. Air Force) con contributo n. AF-AFOSR-139-64 e dalla National Science Foundation con contributo GP-2413.

[**] In questo lavoro anziché utilizzare la traduzione letterale italiana di *fuzzy*, ovvero "sfumato", si è mantenuto il termine originale coniato da Zadeh (v. la nota del traduttore in Kosko 1995: 13). N.d.T.

[1] Un'applicazione di questo concetto alla formulazione di una classe di problemi all'interno dei modelli di classificazione è descritta in RAND Memorandum RM-4307-PR, "Abstraction and Pattern Classification", di P. Bellman, R. Kalaba e L.A. Zadeh, ottobre 1964.

Un *insieme* (*classe*) *fuzzy* A in X è caratterizzato da una *funzione* (*caratteristica*) *di appartenenza* $f_A(x)$, la quale associa a ogni punto[2] in X un numero reale nell'intervallo [0,1][3], con il valore di $f_A(x)$ a x che rappresenta il "grado di appartenenza" di x in A. Cosicché più è vicino all'unità il valore di $f_A(x)$, più alto risulta il grado di appartenenza di x in A. Quando A è un insieme nel senso ordinario del termine, la sua funzione di appartenenza può assumere soltanto due valori 0 o 1, con $f_A(x) = 1$ o 0 a seconda che x appartenga o non appartenga ad A. In questo caso dunque $f_A(x)$ si riduce alla nota funzione caratteristica di un insieme A. (Nel caso ci sia bisogno di distinguere questo genere d'insiemi da quelli *fuzzy*, gli insiemi con funzioni caratteristiche a due valori verranno chiamati *insiemi ordinari* o semplicemente *insiemi*).

Esempio. Sia X la linea reale R^1 e sia A un insieme *fuzzy* di numeri molto più grandi di 1. È possibile allora dare una precisa, sebbene soggettiva, caratterizzazione di A stabilendo che $f_A(x)$ è una funzione su R^1. I valori rappresentativi di tale funzione potrebbero essere: $f_A(0) = 0$; $f_A(1) = 0$; $f_A(5) = 0.01$; $f_A(10) = 0.2$; $f_A(100) = 0.95$; $f_A(500) = 1$.

È da notare che, sebbene la funzione di appartenenza di un insieme *fuzzy* abbia una qualche somiglianza con una funzione di probabilità quando X è un insieme numerabile (o con una funzione di densità di probabilità quando X è un continuum), vi sono delle differenze essenziali tra questi due concetti che diventeranno più chiare in seguito quando saranno stabilite le regole di combinazione delle funzioni di appartenenza e le loro proprietà di base. Infatti, la nozione di insieme *fuzzy* è di natura totalmente a-statistica.

Iniziamo dunque con alcune definizioni che coinvolgono gli insiemi *fuzzy* e che sono ovvie estensioni delle corrispondenti definizioni relative agli insiemi ordinari.

Un insieme *fuzzy* è *vuoto* se e solo se la sua funzione di appartenenza è uguale a zero su X.

Due insiemi *fuzzy* A e B sono *uguali*, scriveremo $A = B$, se e solo se $f_A(x) = f_B(x)$ per tutte le x in X. (In seguito al posto di $f_A(x) = f_B(x)$ per tutte le x in X, scriveremo più semplicemente $f_A = f_B$).

Il *complemento* di un insieme *fuzzy* A è indicato con A' ed è definito da

$$f_{A'} = 1 - f_A . \tag{1}$$

Come nel caso degli insiemi ordinari, la nozione di contenimento svolge un ruolo centrale nel caso degli insiemi *fuzzy*. Questa nozione assieme alle nozioni correlate di unione e intersezione sono definite come segue.

Contenimento. A è *contenuto in B* (o A è *sottoinsieme di B*, o A è *minore o uguale a B*) se e solo se $f_A \leqq f_B$. Indicato col simbolo

$$A \subset B \Leftrightarrow f_A \leqq f_B . \tag{2}$$

Unione. L'unione di due insiemi *fuzzy* A e B con le rispettive funzioni di appartenenza $f_A(x)$ e $f_B(x)$ è un insieme *fuzzy* C, che scriveremo $C = A \cup B$, la cui funzione di appartenenza è connessa a quelle di A e di B attraverso

$$f_C(x) = \text{Max}\,[f_A(x), f_B(x)], \qquad x \in X \tag{3}$$

[2] Più in generale, il campo di definizione di $f_A(x)$ può essere ristretto a un sottoinsieme di X.
[3] In uno scenario più generale si può prendere come estensione della funzione di appartenenza un insieme appropriato P parzialmente ordinato. Per i nostri scopi è opportuno e sufficiente restringere l'estensione di f all'intervallo unitario. Se i valori di $f_A(x)$ sono intesi come valori di verità, il secondo caso corrisponde a una logica a più valori con un continuum di valori di verità nell'intervallo [0,1].

o, in forma abbreviata

$$f_C = f_A \vee f_B\,. \tag{4}$$

È da notare che $\cup$ possiede la proprietà associativa, ovvero $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Commento. Una maniera più attraente e intuitiva di definire l'unione è la seguente: L'unione di A e B è l'insieme *fuzzy* più piccolo che contiene sia A che B. Più precisamente, se D è un qualsiasi insieme *fuzzy* che contiene sia A che B, allora contiene anche l'unione di A e B.

Per dimostrare che tale definizione è equivalente alla (3), noteremo in primo luogo che C così come è definito da (3) contiene sia A che B, dunque

$$\text{Max}\,[f_A\,, f_B] \geqq f_A$$

e

$$\text{Max}\,[f_A\,, f_B] \geqq f_B\,.$$

Inoltre, se D è un qualsiasi insieme *fuzzy* che contiene sia A che B, allora

$$f_D \geqq f_A$$
$$f_D \geqq f_B$$

e dunque

$$f_D \geqq \text{Max}\,[f_A\,, f_B] = f_C$$

e questo implica che $C \subset D$. C.V.D.

La nozione di intersezione di insiemi *fuzzy* può essere definita in maniera analoga. Precisamente:

Intersezione. L'*intersezione* di due insiemi *fuzzy* A e B con le rispettive funzioni di appartenenza $f_A\,(x)$ e $f_B\,(x)$ è un insieme *fuzzy* C, che scriveremo $C = A \cap B$, la cui funzione di appartenenza è connessa a quelle di A e B attraverso

$$f_C\,(x) = \text{Min}\,[f_A\,(x), f_B\,(x)], \qquad x \in X, \tag{5}$$

o, in forma abbreviata

$$f_C = f_A \wedge f_B\,. \tag{6}$$

Come nel caso dell'unione, è facile dimostrare che l'intersezione di A e B è l'insieme *fuzzy più grande* che è contenuto sia in A che in B. Come nel caso degli insiemi ordinari, A e B sono *disgiunti* se $A \cap B$ è vuoto. È da notare che $\cap$, come $\cup$, possiede la proprietà associativa.

L'intersezione e l'unione di due insiemi *fuzzy* in R^1 sono illustrati nella Fig. 1. La funzione di appartenenza dell'unione è costituita dai segmenti di curva 1 e 2; quella di intersezione dai segmenti 3 e 4 (linee marcate).

nel grafico nessuna traduzione

FIG. 1. Illustrazione dell'unione e intersezione di insiemi *fuzzy* in R^1.

Commento. È da notare che la nozione di "appartenenza", che svolge un ruolo fondamentale nel caso degli insiemi ordinari, non ricopre lo stesso ruolo nel caso degli insiemi *fuzzy*. Non è dunque significativo parlare di un punto x "appartenente" a un insieme *fuzzy* A, a eccezione del significato banale dell'affermazione che $f_A(x)$ è positiva. Meno banalmente si possono introdurre due livelli α e β ($0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha > \beta$) e convenire sul fatto che (1) "x appartiene ad A" se $f_A(x) \geqq \alpha$; (2) "x non appartiene ad A" se $f_A(x) \leqq \beta$; e (3) "x possiede uno status indeterminato relativamente ad A" se $\beta < f_A(x) < \alpha$. Questo porta a una logica trivalente (Kleene, 1952) con tre valori di verità: T ($f_A(x) \geqq \alpha$), F ($f_A(x) \leqq \beta$) e U ($\beta < f_A(x) < \alpha$).

III. Alcune proprietà di $\cup$, $\cap$, e complemento

Con le operazioni di unione, intersezione e complemento così come sono state definite in (3), (5) e (1), è facile estendere agli insiemi *fuzzy* buona parte delle identità di base che valgono per gli insiemi ordinari. Ad esempio abbiamo

$$\left.\begin{aligned} (A \cup B)' &= A' \cap B' \quad (7) \\ (A \cap B)' &= A' \cup B' \quad (8) \end{aligned}\right\} \text{ leggi di De Morgan}$$

$$C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B) \quad \text{Leggi distributive} \tag{9}$$

$$C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B) \tag{10}$$

Queste e simili uguaglianze possono essere facilmente stabilite dimostrando che le relazioni corrispondenti per le funzioni di appartenenza di A, B e C sono delle identità. Per esempio, nel caso di (7) abbiamo

$$1 - \text{Max}\,[f_A, f_B] = \text{Min}\,[1 - f_A, 1 - f_B] \tag{11}$$

si può facilmente verificare che questa sia un'identità mettendola alla prova nei due casi possibili: $f_A(x) > f_B(x)$ e $f_A(x) < f_B(x)$.

Allo stesso modo nel caso di (10), la relazione corrispondente in termini di f_A, f_B e f_C è:

$$\text{Max}\,[f_C, \text{Min}\,[f_A, f_B]] = \text{Min}\,[\text{Max}\,[f_C, f_A], \text{Max}\,[f_C, f_B]] \tag{12}$$

si può verificare che questa è un'identità prendendo in considerazione i sei casi:

$f_A(x) > f_B(x) > f_C(x)$, $f_A(x) > f_C(x) > f_B(x)$, $f_B(x) > f_A(x) > f_C(x)$, $f_B(x) > f_C(x) > f_A(x)$, $f_C(x) > f_A(x) > f_B(x)$, $f_C(x) > f_B(x) > f_A(x)$.

Fondamentalmente, gli insiemi *fuzzy* in X costituiscono un reticolo distributivo con elemento nullo e unitario (Birkhoff, 1948).

UN'INTERPRETAZIONE DELLE UNIONI E DELLE INTERSEZIONI

Nel caso degli insiemi ordinari, un insieme C espresso nei termini di una famiglia di insiemi $A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n$ attraverso i connettivi $\cup$ e $\cap$, può essere rappresentato come una rete di interruttori $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, con $A_i \cap A_j$ e $A_i \cup A_j$ che corrispondono rispettivamente a combinazioni in serie e in parallelo di α_i e α_j. Nel caso degli insiemi *fuzzy*, si può dare un'analoga interpretazione in termini di setacci. Precisamente, dato $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, che esprime il valore della funzione di appartenenza di A_i a x, si associ a $f_i(x)$ un setaccio $S_i(x)$ le cui maglie siano della grandezza $f_i(x)$. Allora, $f_i(x) \vee f_j(x)$ e $f_i(x) \wedge f_j(x)$ corrispondono rispettivamente a combinazioni in parallelo e in serie di $S_i(x)$ e $S_j(x)$, come si vede nella Fig. 2.

Più generalmente, un'espressione ben formata che implica $A_1, \ldots, A_n$, $\cup$ e $\cap$ corrisponde a una rete di setacci $S_1(x), \ldots, S_n(x)$ che può essere individuata attraverso le tecniche convenzionali di sintesi per circuiti di commutazione. Un esempio molto semplice è il seguente,

$$C = [(A_1 \cup A_2) \cap A_3] \cup A_4 \tag{13}$$

che corrisponde alla rete della Fig. 3.

È da notare che le misure della maglia dei setacci nella rete dipendono da x e che l'intera rete equivale a un singolo setaccio le cui maglie sono della misura di $f_C(x)$.

nel grafico nessuna traduzione

FIG. 2. Connessione in serie e in parallelo di setacci contemporaneamente $\cup$ e $\cap$.

nel grafico nessuna traduzione

FIG. 3. Una rete di setacci contemporaneamente $\{[f_1(x) \vee f_2(x)] \wedge f_3(x)\} \vee f_4(x)$.

IV. OPERAZIONI ALGEBRICHE SUGLI INSIEMI *FUZZY*

Oltre alle operazioni di unione e intersezione, si possono stabilire numerosi altri modi di formare combinazioni di insiemi *fuzzy* e metterli in relazione l'un l'altro. Tra i più importanti ci sono:

Prodotto algebrico. Il *prodotto algebrico* di A e B viene indicato da AB e definito in termini di funzioni di appartenenza di A e B attraverso la relazione

$$f_{AB} = f_A f_B . \qquad (14)$$

Chiaramente,

$$AB \subset A \cap B. \qquad (15)$$

Somma algebrica[4]. La *somma algebrica* di A e B è indicata con $A + B$ e viene definita con

$$f_{A+B} = f_A + f_B \qquad (16)$$

purché la somma $f_A + f_B$ sia minore o uguale all'unità. Di conseguenza, a differenza del prodotto algebrico, la somma algebrica ha significato solo quando la condizione $f_A(x) + f_B(x) \leqq 1$ è soddisfatta per tutte le x.

Differenza assoluta. La *differenza assoluta* di A e B si indica con $|A - B|$ e viene definita da

$$f_{|A-B|} = | f_A - f_B | .$$

È da notare che nel caso degli insiemi ordinari, $|A - B|$ si riduce al complemento relativo di $A \cap B$ in $A \cup B$.

Combinazione convessa. Con una combinazione convessa di due vettori f e g di norma s'intende una combinazione lineare di f e g del tipo $\lambda f + (1 - \lambda)g$, in cui $0 \leqq \lambda \leqq 1$. Questo modo di combinare f e g può essere generalizzato agli insiemi *fuzzy* nel seguente modo.

Siano A, B e Λ degli insiemi *fuzzy* arbitrari. La *combinazione convessa di A, B e Λ* si indica con $(A,B; \Lambda)$ e viene definita dalla relazione

$$(A, B; \Lambda) = \Lambda A + \Lambda' B \qquad (17)$$

dove Λ' è il complemento di Λ. Trascritto in termini di funzioni di appartenenza, (17) si legge

$$f_{(A,B;\Lambda)}(x) = f_\Lambda(x) f_A(x) + [1 - f_\Lambda(x)] f_B(x), \quad x \in X. \qquad (18)$$

Una proprietà di base della combinazione convessa di A, B e Λ si esprime con

$$A \cap B \subset (A, B; \Lambda) \subset A \cup B \text{ per tutti gli } \Lambda. \qquad (19)$$

Questa proprietà è un'immediata conseguenza delle ineguaglianze

$$\text{Min}\,[f_A(x), f_B(x)] \leqq \lambda f_A(x) + (1-\lambda) f_B(x) \leqq \text{Max}\,[f_A(x), f_B(x)], \qquad x \in X \qquad (20)$$

che rimangono valide per tutti le λ in [0,1]. È interessante osservare che, dato un qualsiasi insieme *fuzzy* C che soddisfa $A \cap B \subset C \subset A \cup B$, è sempre possibile trovare un insieme *fuzzy* Λ tale che $C = (A, B\,;\,\Lambda)$. La funzione di appartenenza di questo insieme è data da

$$f_\Lambda(x) = \frac{f_C(x) - f_B(x)}{f_A(x) - f_B(x)}, \qquad x \in X. \qquad (21)$$

Relazione fuzzy. Il concetto di *relazione* (che è una generalizzazione di quello di *funzione*) si estende in modo naturale agli insiemi *fuzzy* e svolge un ruolo importante nella teoria di tali insiemi e delle loro applicazioni - così come nel caso degli insiemi ordinari. In seguito, definiremo semplicemente la nozione di relazione *fuzzy* e accenneremo soltanto ad alcuni concetti correlati.

Normalmente una relazione viene definita come un insieme di coppie ordinate (Halmos, 1960); p.e., l'insieme di tutte le coppie ordinate di numeri reali x e y tali che $x \geqq y$. Nel contesto degli insiemi *fuzzy*, una *relazione fuzzy in X* è un insieme *fuzzy* nello spazio prodotto $X \times X$. Per esempio, la relazione indicata con $x \gg y$, $x, y \in R^1$, può essere considerata come un insieme *fuzzy* A in R^2, con la funzione di appartenenza di A, $f_A(x, y)$, che possiede i seguenti (soggettivi) valori rappresentativi: $f_A(10,5) = 0$; $f_A(100,10) = 0.7$; $f_A(100,1) = 1$; ecc.

Più generalmente, si può definire una *relazione fuzzy di rango n* in X come un insieme *fuzzy* A nello spazio prodotto $X \times X \times ... \times X$. Per tali relazioni la funzione di appartenenza è della forma $f_A(x_1, ..., x_n)$, dove $x_i \in X$, $i = 1, ..., n$.

Nel caso delle relazioni *fuzzy* binarie, il composto di due relazioni *fuzzy* A e B si indica con $B \circ A$ e viene definito come una relazione *fuzzy* in X la cui funzione di appartenenza è correlata a quelle di A e B attraverso

$$f_{B \circ A}(x,y) = \text{Sup}_v \ \text{Min}\,[f_A(x,v), f_B(v,y)].$$

È da notare che l'operazione di composto possiede la proprietà associativa

$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C.$$

Insiemi fuzzy derivati da applicazioni. Sia T un'applicazione da X allo spazio Y. Sia B un insieme *fuzzy* in Y con la funzione di appartenenza $f_B(y)$. L'applicazione inversa T^{-1} fa derivare un insieme *fuzzy* A in X la cui funzione di appartenenza è definita da

$$f_A(x) = f_B(y), \qquad y \in Y \qquad (22)$$

per tutte le x in X che vengono applicate da T in y.

---

[4] Il duale del prodotto algebrico è la *somma* $A \oplus B = (A'B')' = A + B - AB$. (Indicazione di T. Cover). Si noti che per gli insiemi ordinari $\cap$ e il prodotto algebrico sono operazioni equivalenti, così come lo sono $\cup$ e $\oplus$.

Si consideri ora un problema inverso nel quale A è un dato insieme *fuzzy* in X, e T, come prima, è un'applicazione da X a T. La domanda è la seguente: Quale è la funzione di appartenenza per l'insieme *fuzzy* B in Y che deriva da questa applicazione?

Se T non è uno a uno, allora sorge un'ambiguità quando due o più punti distinti in X, diciamo x_1 e x_2, con diversi gradi di appartenenza in A, vengono applicati nello stesso punto y in Y. In questo caso, la domanda è: Quale grado di appartenenza in B dovrebbe essere assegnato a y?

Per risolvere questa ambiguità, concordiamo nell'assegnare il maggiore dei due gradi di appartenenza a y. Più in generale, la funzione di appartenenza per B sarà definita da

$$f_B\,(y) = \mathrm{Max}_{\,x \in T^{-1}(y)}\; f_A\,(x), \qquad y \in Y \tag{23}$$

dove $T^{-1}\,(y)$ è l'insieme di punti in X che sono stati applicati in y da T.

V. CONVESSITÀ

Come si vedrà in seguito, la nozione di convessità può essere estesa facilmente agli insiemi *fuzzy* in modo da preservare molte delle proprietà che essa possiede nel contesto degli insiemi ordinari. Questa nozione sembra particolarmente utile nelle applicazioni che implicano modelli di classificazione, di ottimizzazione e altri problemi correlati.

Da tradurre nel testo:

convex fuzzy set = insieme *fuzzy* convesso

non-convex fuzzy set = insieme *fuzzy* non convesso

FIG. 4. Insiemi *fuzzy* convessi e non convessi in E^1.

In ciò che segue, assumiamo per concretezza che X sia un reale spazio euclideo E^n.

DEFINIZIONI

Convessità. Un insieme *fuzzy* A è *convesso* se e solo se gli insiemi Γ_α definiti da

$$\Gamma_\alpha = \{x \mid f_A\,(x) \geqq \alpha\} \tag{24}$$

sono convessi per tutte le α nell'intervallo (0,1].

Una definizione alternativa più diretta di convessità è la seguente[5]: A è convesso se e solo se

$$f_A\,[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geqq \mathrm{Min}\,[f_A\,(x_1), f_A\,(x_2)] \tag{25}$$

[5] Questo modo di esprimere la convessità è stata suggerita a chi scrive dal collega E. Berlekamp.

per tutte le x_1 e le x_2 in X e tutte le λ nell'intervallo [0,1]. È da notare che questa definizione non implica che $f_A(x)$ debba essere una funzione convessa di x. Questo è illustrato nella Fig. 4 per $n = 1$.

Per mostrare l'equivalenza tra le definizioni sopra riportate si noti che se A è convesso nel senso della prima definizione e $\alpha = f_A(x_1) \leqq f_A(x_2)$, allora $x_2 \in \Gamma_\alpha$ e $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \Gamma_\alpha$ per la convessità di Γ_α. Dunque

$$f_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geqq \alpha = f_A(x_1) = \mathrm{Min}\,[f_A(x_1), f_A(x_2)].$$

Viceversa, se A è convesso nel senso della seconda definizione e $\alpha = f_A(x_1)$, allora Γ_α può essere considerato come l'insieme di tutti i punti x_2 per i quali $f_A(x_2) \geqq f_A(x_1)$. In virtù di (25), ogni punto del tipo $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, $0 \leqq \lambda \leqq 1$, è anche in Γ_α e dunque Γ_α è un insieme convesso. C.V.D.

Una proprietà di base degli insiemi *fuzzy* convessi è espressa dal

TEOREMA. *Se A e B sono convessi, lo è anche la loro intersezione.*

Dimostrazione: Sia $C = A \cap B$. Allora

$$f_C[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] = \mathrm{Min}\,[f_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2], f_B[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2]]. \tag{26}$$

Ora, dal momento che A e B sono convessi

$$\begin{aligned}&[f_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geqq \mathrm{Min}\,[f_A(x_1), f_A(x_2)]\\ &[f_B[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geqq \mathrm{Min}\,[f_B(x_1), f_B(x_2)]\end{aligned} \tag{27}$$

e dunque

$$f_C[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geqq \mathrm{Min}\,[\mathrm{Min}\,[f_A(x_1), f_A(x_2)], \mathrm{Min}\,[f_B(x_1), f_B(x_2)]] \tag{28}$$

o l'equivalente

$$f_C[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geqq \mathrm{Min}\,[\mathrm{Min}\,[f_A(x_1), f_B(x_1)], \mathrm{Min}\,[f_A(x_2), f_B(x_2)]] \tag{29}$$

e allora

$$f_C[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geqq \mathrm{Min}\,[f_C(x_1), f_C(x_2)]. \qquad \text{C.V.D.} \tag{30}$$

Limitatezza. Un insieme *fuzzy* A è *limitato* se e solo se gli insiemi $\Gamma_\alpha = \{x \mid f_A(x) \geqq \alpha\}$ sono limitati per tutte le $\alpha > 0$; ovvero, per tutte le $\alpha > 0$ esiste una $R(\alpha)$ finita tale che $\| x \| \leqq R(\alpha)$ per tutte le x in Γ_α.

Se A è un insieme limitato, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un iperpiano H tale che $f_A(x) \leqq \varepsilon$ per tutte le x sul lato di H che non contiene l'origine. Ad esempio, si consideri l'insieme $\Gamma_\varepsilon = \{x \mid f_A(x) \geqq \varepsilon\}$. Per ipotesi, questo insieme è contenuto in una sfera S di raggio $R(\varepsilon)$. Sia H un qualsiasi iperpiano che supporta S. Allora, tutti i punti sul lato di H che non contiene l'origine si trovano all'esterno o su S, e dunque per tutti questi punti $f_A(x) \leqq \varepsilon$.

LEMMA. *Sia A un insieme fuzzy limitato e sia* $M = \text{Sup}_x\ f_A(x)$. (*M si riferirà al grado massimale in A). Allora c'è almeno un punto* x_0 *per il quale M è necessariamente raggiunto nel senso che, per ogni* $\varepsilon > 0$, *ciascun intorno sferico di* x_0 *contiene punti nell'insieme* $Q(\varepsilon) = \{x \mid f_A(x) \geqq M - \varepsilon\}$.

Dimostrazione[6]. Si consideri una successione annidata di insiemi limitati $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$, dove $\Gamma_n = \{x \mid f_A(x) \geqq M - M/(n+1)\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Si noti che Γ_n è non-vuoto per tutte le n finite come conseguenza della definizione di M come $M = \text{Sup}_x\ f_A(x)$. (Supponiamo che $M > 0$).

Sia x_n un punto scelto arbitrariamente in Γ_n, $n = 1, 2, \ldots$. Allora, $x_1, x_2, \ldots$, è una successione di punti in un insieme chiuso e limitato Γ_1. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, questa successione deve avere almeno un punto limite, detto x_0, in Γ_1. Di conseguenza ciascun intorno sferico di x_0 includerà infinitamente molti punti della successione $x_1, x_2, \ldots$, e, più precisamente, della sottosuccessione $x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots$, dove $N \geqq M/\varepsilon$. Dal momento che i punti di questa sottosuccessione rientrano nell'insieme $Q(\varepsilon) = \{x \mid f_A(x) \geqq M - \varepsilon\}$, il lemma è dimostrato.

Convessità stretta e forte. Un insieme *fuzzy A* è *strettamente convesso* se gli insiemi Γ_α, $0 < \alpha \leqq 1$ sono strettamente convessi (ovvero, se il punto medio di due punti distinti qualsiasi in Γ_α cade all'interno di Γ_α). Si noti che questa definizione si riduce a quella di convessità stretta per gli insiemi ordinari quando A è un tale insieme.

Un insieme *fuzzy A* è *fortemente convesso* se, per due punti distinti qualsiasi x_1 e x_2, e per ogni λ nell'intervallo aperto (0,1)

$$f_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] > \text{Min}\,[f_A(x_1), f_A(x_2)].$$

Si noti che la convessità forte non implica la convessità stretta o viceversa. Si noti anche che se A e B sono limitati, lo sono anche la loro unione e la loro intersezione. Allo stesso modo, se A e B sono strettamente (fortemente) convessi, la loro intersezione è strettamente (fortemente) convessa.

Sia A un insieme *fuzzy* convesso e sia $M = \text{Sup}_x\ f_A(x)$. Se A è limitato, allora, come abbiamo appena mostrato, o M è raggiunto per qualche x, diciamo x_0, oppure c'è almeno un punto x_0 per il quale M è necessariamente raggiunto nel senso che, per ogni $\varepsilon > 0$, ciascun intorno sferico di x_0 contiene punti nell'insieme $Q(\varepsilon) = \{x \mid M - f_A(x) \leqq \varepsilon\}$. In particolare, se A è fortemente convesso e x_0 è raggiunto, allora x_0 è unico. Ad esempio, se $M = f_A(x_0)$ e $M = f_A(x_1)$, con $x_1 \neq x_0$, allora $f_A(x) > M$ per $x = 0.5\,x_0 + 0.5\,x_1$, che contraddice $M = \text{Max}_x\ f_A(x)$.

Più in generale, sia $C(A)$ l'insieme di tutti i punti in X per i quali M è necessariamente raggiunto. Questo insieme sarà detto il *nucleo* di A. Nel caso di insiemi *fuzzy* convessi, possiamo affermare la seguente proprietà di $C(A)$.

TEOREMA. *Se A è un insieme fuzzy convesso, allora anche il suo nucleo è un insieme convesso*.

Dimostrazione: Sarà sufficiente mostrare che se M è necessariamente raggiunto per x_0 e x_1, $x_1 \neq x_0$, allora è necessariamente raggiunto anche per tutti gli x del tipo $x = \lambda x_0 + (1-\lambda)x_1$, $0 \leqq \lambda \leqq 1$.

Infine, sia P un cilindro di raggio ε che ha come suo asse la linea che passa per x_0 e x_1. Sia x_0' un punto nella sfera di raggio ε con il centro in x_0 e sia x_1' un punto nella sfera di raggio ε con il centro in x_1 tale che $f_A(x_0') \geqq M - \varepsilon$ e $f_A(x_1') \geqq M - \varepsilon$. Allora, per la convessità di A, per qualsiasi punto u sul segmento $x_0'\,x_1'$, abbiamo $f_A(u) \geqq M - \varepsilon$. Inoltre, per la convessità di P, tutti i punti su $x_0'\,x_1'$ cadranno in P.

Adesso sia x qualsiasi punto nel segmento $x_0\,x_1$. La distanza di questo punto dal segmento $x_0'\,x_1'$ deve essere minore o uguale a ε, dal momento che $x_0'\,x_1'$ cade in P. Di conseguenza, una sfera di raggio ε con il centro in x includerà alme-

[6] Tale dimostrazione è stata proposta da A.J. Thomasian.

no un punto del segmento $x_0' \, x_1'$ e dunque includerà almeno un punto, diciamo w, per il quale $f_A\ (w) \geqq M - \varepsilon$. Questo dimostra che M è necessariamente raggiunto per x e quindi verifica il teorema.

COROLLARIO. *Se $X = E^1$ e A è fortemente convesso, allora il punto per il quale M è necessariamente raggiunto è unico.*

L'ombra di un insieme fuzzy. Sia A un insieme *fuzzy* in E^n con una funzione di appartenenza $f_A(x) = f_A\ (x_1, \ldots, x_n)$. Per semplificare la notazione, la nozione di *ombra* (proiezione) di A su un iperpiano H verrà di seguito definita per il caso particolare in cui H è un iperpiano di coordinate, p.e., $H = \{x \mid x_1 = 0\}$.

Precisamente, l'*ombra* di A su $H = \{x \mid x_1 = 0\}$ viene definita come un insieme *fuzzy* $S_H(A)$ in E^{n-1} con $f_{S_H(A)}(x)$ data da

$$f_{S_H(A)}(x) = f_{S_H(A)}(x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{Sup}_{x_1} f_A(x_1, \ldots, x_n).$$

Si noti che questa definizione è coerente con (23).

Quando A è un insieme *fuzzy* convesso, la seguente proprietà di $S_H(A)$ è un'immediata conseguenza della definizione appena data: Se A è un insieme *fuzzy* convesso, allora la sua ombra su un qualsiasi iperpiano è anch'essa un insieme *fuzzy* convesso.

Un'interessante proprietà delle ombre di due insiemi *fuzzy* convessi è espressa dalla seguente implicazione

$$S_H(A) = S_H(B) \text{ per tutti gli } H \Rightarrow A = B.$$

Per verificare questa asserzione[7], è sufficiente mostrare che se esiste un punto, diciamo x_0, tale che $f_A\ (x_0) \neq f_B\ (x_0)$, allora esiste un iperpiano H tale che $f_{S_H(A)}(x_0^*) \neq f_{S_H(B)}(x_0^*)$, dove x_0^* è la proiezione di x_0 su H.

Supponiamo che $f_A(x_0) = \alpha > f_B\ (x_0) = \beta$. Dal momento che B è un insieme *fuzzy* convesso, l'insieme $\Gamma_\beta = \{x \mid f_B\ (x) > \beta\}$ è convesso, e dunque esiste un iperpiano F che supporta Γ_β e passa per x_0. Sia H un iperpiano ortogonale a F, e sia x_0^* la proiezione di x_0 su H. Allora, dal momento che $f_B\ (x) \leqq \beta$ per tutte le x su F, abbiamo $f_{S_H(B)}(x_0^*) \leqq \beta$. Dall'altra parte, $f_{S_H(A)}(x_0^*) \geqq \alpha$. Di conseguenza, $f_{S_H(B)}(x_0^*) \neq f_{S_H(A)}(x_0^*)$, e analogamente per il caso in cui $\alpha < \beta$.

Una forma un po' più generale dell'asserzione appena fatta è la seguente:
Sia A, ma non necessariamente B, un insieme *fuzzy* convesso, e sia $S_H(A) = S_H(B)$ per tutti gli H. Allora $A = \mathrm{conv}\ B$, dove conv B è l'inviluppo convesso di B, ovvero, l'insieme convesso più piccolo che contiene B. Più in generale, $S_H(A) = S_H(B)$ per tutti gli H implica conv A = conv B.

Disgiunzione di insiemi fuzzy convessi. Il classico teorema di disgiunzione per gli insiemi ordinari convessi stabilisce, in sostanza, che se A e B sono insiemi convessi disgiunti, allora esiste un iperpiano di disgiunzione H tale che A si trova su un lato di H e B sull'altro lato.

È naturale chiedersi se questo teorema può essere esteso agli insiemi *fuzzy* convessi, senza che A e B siano disgiunti, dal momento che la condizione di disgiunzione è fin troppo restrittiva nel caso degli insiemi *fuzzy*. Come si vedrà in seguito, la risposta a questa domanda risulta essere affermativa.

[7] Questa dimostrazione si basa su un'idea suggerita da G. Dantzig per il caso in cui A e B siano insiemi ordinari convessi.

In primo luogo dovremmo fornire alcune definizioni. In particolare, siano A e B due insiemi *fuzzy* limitati e sia H una ipersuperficie in E^n definita dall'equazione $h(x) = 0$, con tutti i punti per i quali $h(x) \geqq 0$ che si trovano su un lato di H e tutti i punti per i quali $h(x) \leqq 0$ che si trovano sull'altro lato[8]. Sia K_H un numero dipendente da H tale che $f_A(x) \leqq K_H$ su un lato di H e $f_B(x) \leqq K_H$ sull'altro lato. Sia M_H Inf K_H. Il numero $D_H = 1 - M_H$ sarà detto *grado di disgiunzione di A e B da H.*

Di solito non si ha a che fare con una data ipersuperficie H ma con una famiglia di ipersuperfici $\{H_\lambda\}$, con λ disposta su, diciamo, E^m. Il problema, allora, è trovare un membro di questa famiglia che realizzi il grado più alto possibile di disgiunzione.

Un caso particolare di questo problema è quando le H_λ sono iperpiani in E^n, con λ disposta su E^n. In questo caso, definiamo il *grado di disgiunzione* di A e B attraverso la relazione

$$D = 1 - \overline{M} \tag{31}$$

dove

$$\overline{M} = \text{Inf}_H \, M_H \tag{32}$$

Con l'indice posto in basso λ omesso per semplicità.

Da tradurre nel grafico:

hyperplane H (point) = iperpiano H (punto)

FIG. 5. Illustrazione del teorema di disgiunzione per insiemi *fuzzy* in E^1.

Tra le varie asserzioni che si possono fare su D, la seguente affermazione[9] è in realtà un'estensione agli insiemi *fuzzy* convessi del teorema di disgiunzione.

TEOREMA. *Siano A e B insiemi fuzzy limitati in* E^n*, con gradi massimali* M_A *e* M_B*, rispettivamente* [$M_A = \text{Sup}_x f_A(x)$, $M_B = \text{Sup}_x f_B(x)$]. *Sia M il grado massimale per l'intersezione* $A \cap B$ ($M = \text{Sup}_x \text{ Min } [f_A(x), f_B(x)]$). *Allora* $D = 1 - M$.

Commento. In parole povere, il teorema stabilisce che il grado più alto di disgiunzione di due insiemi *fuzzy* convessi A e B che è possibile raggiungere con un iperpiano in E^n è pari a uno meno il grado di livello massimo nell'intersezione $A \cap B$. Questo è illustrato nella Fig. 5 per $n = 1$.

Dimostrazione. È opportuno considerare separatamente i due casi seguenti:
(1) $M = \text{Min}(M_A, M_B)$ e (2) $M < \text{Min}(M_A, M_B)$. Si noti che il secondo caso esclude $A \subset B$ o $B \subset A$.

Caso 1. Per concretezza supponiamo che $M_A < M_B$, così che $M = M_A$. Allora, per la proprietà degli insiemi limitati, che abbiamo già enunciato, esiste un iperpiano H tale che $f_B(x) \leqq M$ per tutte le x su un lato di H. Sull'altro lato di H, $f_A(x) \leqq M$ perché $f_A(x) \leqq M_A = M$ per tutte le x.

[8] Si noti che gli insiemi in questione possiedono H in comune.

Rimane da mostrare che non esiste un $M' < M$ e un iperpiano H' tale che $f_A\ (x) \leqq M'$ su un lato di H' e $f_B\ (x) \leqq M'$ sull'altro lato.

Questo deriva immediatamente dalla seguente osservazione. Supponiamo che tali H' e M' esistano, e supponiamo per concretezza che il nucleo di A (cioè l'insieme di punti per i quali $M_A = M$ è necessariamente raggiunto) si trovi sul lato positivo di H'. Questo esclude la possibilità che $f_A\ (x) \leqq M'$ per tutte le x sul lato positivo di H', e dunque rende necessario che sia $f_A\ (x) \leqq M'$ per tutte le x sul lato negativo di H', *e* $f_B\ (x) \leqq M'$ per tutte le x sul lato positivo di H'. Di conseguenza, sopra tutte le x sul lato positivo di H' sarà

$$\text{Sup}_x \text{ Min } [f_A\ (x), f_B\ (x)\ ] \leqq M'$$

e così per tutte le x sul lato negativo di H'. Ciò implica che, sopra tutte le x in X, sia $\text{Sup}_x \text{ Min } [f_A\ (x), f_B\ (x)\ ] \leqq M'$, che contraddice la presupposizione che $\text{Sup}_x \text{ Min } [f_A\ (x), f_B\ (x)\ ] = M > M'$.

Caso 2. Si considerino gli insiemi convessi $\Gamma_A = \{x \mid f_A\ (x) > M\}$ e $\Gamma_B = \{x \mid f_B\ (x) > M\}$. Questi insiemi sono non-vuoti e disgiunti, poiché se non lo fossero esisterebbe un punto, diciamo u, tale che $f_A (u) > M$ e $f_B\ (u) > M$, e dunque $f_{A \cap B}\ (u) > M$, che contraddice la presupposizione che $M = \text{Sup}_x f_{A \cap B}\ (u)$.

Dal momento che Γ_A e Γ_B sono disgiunti, per il teorema di disgiunzione per gli insiemi ordinari convessi, esiste un iperpiano H tale che Γ_A si trova su un lato di H (diciamo il lato positivo) e Γ_B sull'altro (il lato negativo). Inoltre, per le definizioni di Γ_A e Γ_B, per tutti i punti sul lato negativo di H, $f_A\ (x) \leqq M$, e per tutti i punti sul lato positivo di H, $f_B\ (x) \leqq M$.

Perciò abbiamo mostrato che esiste un iperpiano H che realizza $1 - M$ come grado di disgiunzione di A e B. La conclusione, ossia il fatto che un grado più alto di disgiunzione di A e B non può essere realizzato, deriva dall'argomentazione fornita nel Caso 1. Questo mette fine alla dimostrazione del teorema.

Il teorema di disgiunzione per insiemi *fuzzy* convessi sembra essere particolarmente adatto al problema dei modelli di differenziazione. La sua applicazione a questa classe di problemi così come a quelli di ottimizzazione verrà analizzata in lavori successivi sugli insiemi *fuzzy* e le loro proprietà.

30 Novembre 1964.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

BIRKHOFF, G. 1948. "Lattice Theory", Am. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 25, New York.

HALMOS, P.R. 1960. "Naive Set Theory". Van Nostrand, New York.

KLEENE, S.C. 1952. "Introduction to Metamathematics", p. 334. Van Nostrand, New York.

Traduzione di Barbara Vatta

---

[9] Questa affermazione si basa su un'indicazione di E. Berlekamp.